TRECCANI

Per consultare l'archivio della sezione

Dossier

Trasformazioni e prospettiva nel curricolo di matematica

di *Marta Menghini**

Con una felice intuizione, il matematico belga Paul Libois, allievo di Federigo Enriques, interpretò come 'ombre' i quattro tipi di proiezioni che sono alla base delle trasformazioni geometriche. L'idea di Libois, ripresa e ampliata negli anni Sessanta e Settanta da alcune insegnanti italiane quali Emma Castelnuovo e Lina Mancini Proia, è ancora molto attuale e consente di affrontare in modo semplice e intuitivo il concetto di invariante per trasformazione, andando al di là delle discussioni su se, quanto e come le trasformazioni geometriche siano previste dai vari programmi scolastici, esistenti o in fieri.
Ci basiamo sulle relazioni che intercorrono, in quattro diversi casi, fra una figura piana e la sua ombra proiettata:

Andrea Mantegna, *Morte della Vergine*, 1461, Museo del Prado, Madrid.
Immagine tratta dal sito: www.ilpalo.com

- da raggi paralleli (luce del sole) su un piano parallelo a quello della figura 1. La figura e la sua ombra hanno in comune misure e angoli, esse sono *isometriche*:

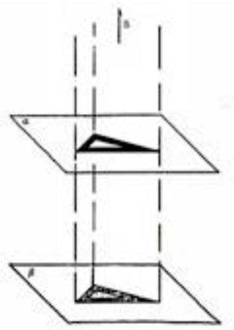

figura 1

- da raggi uscenti da un centro O (lampada) su un piano parallelo a quello della figura L'ombra della figura conserva gli angoli e i rapporti fra segmenti: le due figure sono *simili*:

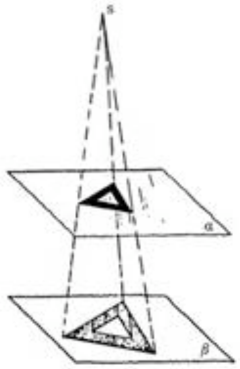

figura 2

- da raggi paralleli su un piano incidente a quello dato, come una finestra (rettangolare) e la sua ombra (a forma di parallelogramma) prodotta dalla luce del sole sul pavimento (figura 3). Si nota subito che gli angoli non si mantengono e così pure i rapporti tra segmenti non allineati, mentre si mantengono i rapporti lungo una stessa direzione, ma soprattutto si mantiene la proprietà di 'essere un parallelogramma', si mantiene cioè il parallelismo. Le due figure sono *affini*:

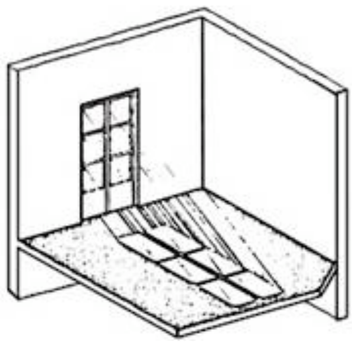

figura 3

- da raggi uscenti da un punto O su un piano incidente a quello dato, come una finestra e la sua ombra prodotta dalla luce di un lampione sul pavimento (figura 4). Si vede allora che non si mantiene il parallelismo, né il rapporto semplice lungo una retta. Così, il punto di mezzo di un segmento si mantiene nei primi tre casi ma non nel quarto. Se però consideriamo quattro punti allineati, si può dimostrare (servendosi del teorema dei seni) che si conserva il rapporto dei rapporti, o *birapporto* dei quattro punti allineati. Il birapporto, oltre all'allineamento, è l'unico invariante di due figure *proiettive*:

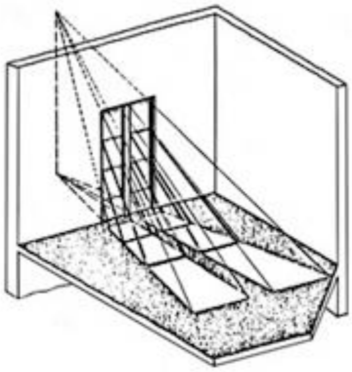

figura 4

Quanto precede può costituire un'introduzione o un riepilogo sulle trasformazioni geometriche in una scuola superiore, ma può anche essere usato per arrivare rapidamente alla proiettività, anzi, nel caso particolare, alla *prospettività* che è appunto una trasformazione proiettiva con una retta unita e un centro di proiezione.
È importante che un alunno sappia riconoscere cosa lega una figura alla sua trasformata, sappia, quindi, capire cosa succede quando si opera su una figura con un cambiamento di riferimento, o un cambiamento di scala, e quali proprietà continuano a valere.
Per ognuna delle trasformazioni elencate ci sono esempi tratti dalle applicazioni o dalla vita reale. A noi qui interessa l'analogia tra la figura 4 e la successiva figura 5:

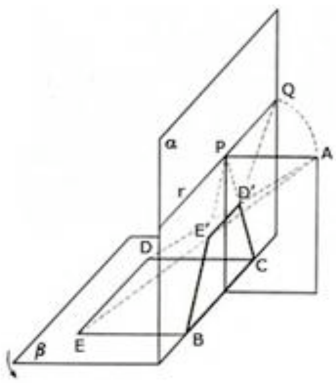

figura 5

In quest'ultima, il centro di proiezione è dato dall'occhio *A* di un pittore che raffigura sul piano a del quadro la figura *BCDE* del piano b. Si tratta di una rappresentazione in *prospettiva*. Dall'immagine pittorica, ribaltando il piano b sul piano a, si arriva a una trasformazione proiettiva, l'omologia, che ha una retta unita, un punto unito *O*, trasforma rette in rette, mantiene il birapporto di 4 punti allineati e in cui i punti all'infinito di tutte le rette hanno una loro immagine, la retta 'limite' *r,* come nella figura 6:

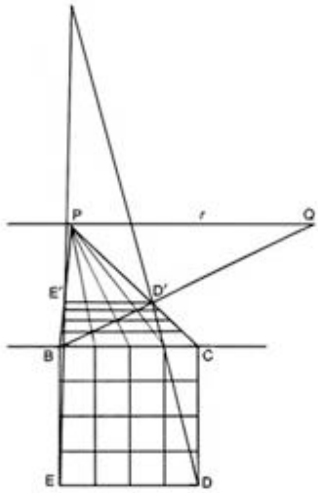

figura 6

Le proprietà dell'omologia sono quelle che consentono la cosiddetta *restituzione prospettica*, ovvero la ricostruzione della vera forma della pianta di una figura. Si tratta di operare in modo inverso rispetto a quello del pittore; vogliamo ricostruire lo spazio che ha suggerito la scena all'artista. Ovviamente occorre che il pittore si sia servito della prospettiva.
Un quadro ci suggerisce la posizione della retta unita (la linea di terra) e ci permette di costruire la retta limite (linea d'orizzonte), che è parallela alla linea di terra; basta quindi individuarne un punto per poterla costruire. Gli elementi del quadro non sono però sufficienti a definire completamente l'omologia: per determinarne il centro è necessario avere due coppie di punti corrispondenti. Non è quindi possibile ricostruire con certezza la vera forma. Spesso però il quadro suggerisce delle ipotesi. Se, per esempio, vi è raffigurata una stanza, si può supporre che i suoi angoli siano retti, o che le mattonelle del pavimento siano quadrate. Con tali ipotesi il problema è risolto: si identifica l'omologia e si può costruire il corrispondente di qualunque altro punto della pianta del quadro.
Torniamo alla figura 6. Supponiamo che sia dato, sul quadro, il solo quadrilatero *BCE'D'*, e che si faccia l'ipotesi che la vera forma sia un quadrato. Possiamo allora costruire il quadrato *BCED* di base *BC* (che sono punti uniti) e collegare *E* con *E'* e *D* con *D'* in modo da ottenere il centro *O*. Il corrispondente di un qualunque punto *X'* (non in figura) sul piano del quadro si trova, per esempio, tracciando la

retta *E′X′* fino a intersecare la linea di terra in un punto *K*: il punto *X*, corrispondente di *X′*, sarà dato dall'intersezione di *KE* con *OX′*. Il punto *O* può essere trovato anche collegando *P* e *Q* con i loro corrispondenti, che sono punti all'infinito; ciò significa tracciare la retta per *P* parallela alla direzione di *BE* e la retta per *Q* parallela alla retta *BD*.
Quanto precede è stato fatto, per esempio, per ricostruire la pianta della *Morte della Vergine* eseguita da Andrea Mantegna negli anni '60 del XV secolo e oggi conservata al Museo del Prado di Madrid:

Nell'ipotesi che le mattonelle siano quadrate, si ottiene un ambiente molto lungo, che fa pensare a una navata:

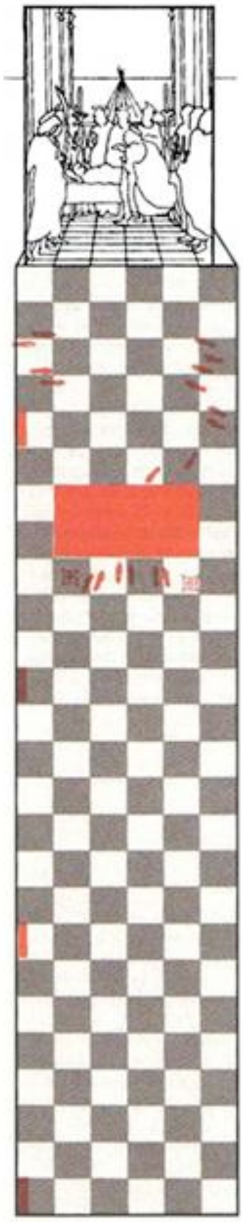

figura 7

Ciò conferma l'idea di alcuni storici dell'arte, che ritengono che il quadro facesse parte di un altro più grande raffigurante una chiesa.
La storia della prospettiva fornisce senz'altro molte opere delle quali effettuare la restituzione prospettica, anche se lo stesso lavoro può essere fatto su una fotografia.
Nell'introdurre l'argomento a scuola ci siamo valsi in passato, quando possibile, della collaborazione dell'insegnante di disegno e di storia dell'arte. Non si tratta di mostrare i vari campi di applicazione della matematica, ma di far vedere il reciproco contributo di varie scienze alla costruzione di un ramo del sapere.

*Docente di Matematica presso il Dipartimento di Matematica della Facoltà di Farmacia,

Università degli Studi di Roma La Sapienza. Sul tema della prospettiva ha pubblicato, con Lina Mancini Proia, *La prospettiva: un incontro tra matematica e arte. Una proposta didattica nella scuola secondaria*, Progetto TID del CNR, quaderno n° 2, 1988.

Pubblicato il 26/1/2007

Torna su **Torna all'indice**