



Aspetti matematici nello studio della prospettiva

di Laura Catastini*

Il metodo assiomatico deduttivo, che è alla base del metodo di indagine scientifica moderno, trae la sua origine e la sua più chiara esemplificazione nella matematica ellenistica, da Euclide ad Archimede. L'educazione al metodo dimostrativo e a una logica rigorosa si può proporre in modo appassionante anche attraverso la lettura e lo studio di opere che nel corso dei secoli hanno affrontato temi legati alla prospettiva, in particolare l'*Ottica* di Euclide (III secolo a.c.), il *De Pictura* di Leon Battista Alberti (1435), il *De Prospectiva Pingendi* di Piero della Francesca (1482). In questi lavori l'essere di un oggetto e il suo apparire in rapporto alla posizione dell'osservatore si pongono in termini rigorosamente geometrici, e con pochissimi prerequisiti di geometria euclidea è possibile sviluppare teoremi di grande interesse per le loro applicazioni al disegno prospettico. Il confronto tra metodo scientifico e creazione artistica nel campo delle arti visive si pone in modo naturale, allargando la valenza del pensiero matematico. Il tema si presta bene quindi a una trattazione multidisciplinare che coinvolga non solo la storia dell'arte ma anche la filosofia, la storia, le discipline umanistiche tutte, nel loro complesso. Di seguito diamo brevi esempi di aspetti matematici (una proposta completa e dettagliata di questo tipo si trova in:

<http://www.mat.uniroma2.it/pls/varrone/varrone.html>).

Euclide: l'apparente convergenza dei segmenti paralleli

Una delle regole base della prospettiva è che segmenti paralleli (due o più segmenti) vengono visti convergere verso uno stesso punto infinitamente lontano, il quale però, sul quadro, dove la profondità è schiacciata nelle due dimensioni, si rappresenta con un punto 'al finito'. Questa proprietà della geometria della visione darà origine, nel modello matematico formale, ai cosiddetti punti all'infinito, nei quali si incontrano le rette tra loro parallele, e da questa idea nascerà, con Desargues nel XVIII secolo, la moderna geometria proiettiva. Nel caso particolare in cui le linee parallele siano ortogonali al quadro (linee dette anche 'di profondità') esse si



Piero della Francesca, *La flagellazione di Cristo*, 1460, Galleria Nazionale delle Marche, Urbino.

Immagine tratta dal sito:
www.robots.ox.ac.uk

vedono convergere verso un punto che sul quadro è rappresentato dalla proiezione ortogonale dell'occhio - punto noto col nome di 'punto di fuga' o 'punto principale' - chiamato punto 'centrico' da Alberti. Nell'*Ottica* di Euclide, testo di geometria della visione diretta, si trovano una serie di interessanti teoremi legati alla prospettiva, tra cui quello fondamentale che dimostra la convergenza apparente di segmenti tra loro paralleli (uno studio approfondito di questo teorema e delle sue implicite conseguenze si trova in L. Catastini, F. Ghigne, *Le geometrie della visione*, con Cd Rom, Springer-Verlag Italia, 2004).



figura 1. *Stanza delle maschere*, scoperta al Palatino a Roma nel 1961 e datata intorno al 50 a.C., affrescata in prospettiva perfetta

Leon Battista Alberti: il piano di terra come riferimento coordinato

Gli studi prospettici rinascimentali e in particolare il lavoro di Alberti, prefigurando una concezione di tipo cartesiano, portano nel pensiero scientifico l'idea dello spazio come ente matematico preesistente agli oggetti particolari, rendendolo sede di una serie di riferimenti rigorosi ai quali gli oggetti contenuti si rapportano nel processo della loro rappresentazione.

Alberti chiede, nell'azione pittorica, di piastrellare il piano di terra con quadrati tutti uguali tra loro, di lato uguale a un 'braccio' (unità di misura che determina immediatamente un fattore di scala tra l'oggetto reale e la sua rappresentazione), in modo che attraverso questi quadrati sia possibile individuare la posizione di un oggetto rispetto a un altro, le reciproche distanze e grandezze, contando semplicemente il numero di 'mattonelle'. Sul piano poi si alza una linea verticale con la quale misurare le altezze di un oggetto rispetto al piano orizzontale. È questo lo spazio che Alberti rappresenta prospetticamente sul piano del quadro. Sembra che i problemi principali da risolvere nel disegno prospettico fossero, all'epoca, la corretta rappresentazione delle linee orizzontali parallele alla

linea di terra (intersezione tra il piano del quadro e il piano di terra), dette linee 'trasverse', e delle linee verticali, o 'alzate'.

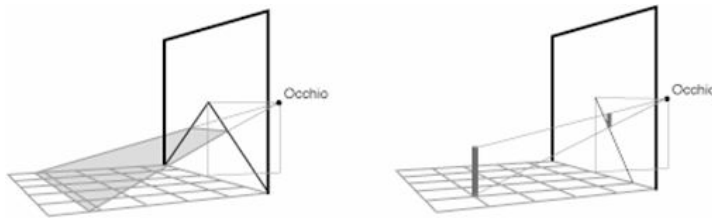


figura 2. La proiezione delle 'linee trasverse' (a sinistra) e la proiezione delle 'alzate' (a destra)

Il primo problema, matematicamente non ovvio, è affrontato dall'autore con la descrizione di un suo 'modo ottimo' di esecuzione. Per il secondo, più facile da affrontare dal punto di vista matematico, Alberti riesce con semplicità a giustificare un metodo prospetticamente corretto. Entrambe le questioni sono facilmente affrontabili da un punto di vista matematico con semplici teoremi di similitudine e permettono di prendere una buona confidenza con la rappresentazione grafica.

Piero della Francesca: la trasformazione omologica

Malgrado il problema della rappresentazione di una qualunque figura disegnata su un piano orizzontale sia teoricamente risolto, Piero aggiunge una costruzione geometrica di grande interesse sia da un punto di vista pratico che da un punto di vista matematico poiché da quel metodo nasce il concetto di trasformazione proiettiva e di omologia. Piero si rende conto, sembra prima di ogni altro, di un fatto semplicissimo già presente in Alberti ma non sfruttato, e cioè che per reticolare un pavimento con quadrati, una volta fatta una prima divisione di un lato e tracciate le linee parallele corrispondenti

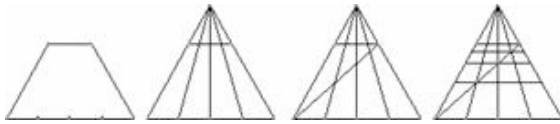


le altre si formano senza più bisogno di misure, ma solo con la riga, semplicemente disegnando la diagonale e tracciando le parallele per i punti d'intersezione:



Il fatto che nelle trasformazioni proiettive l'allineamento si conservi ha permesso a Piero di realizzare la trasformazione del pavimento e delle sue linee a partire dalla resa prospettica del quadrato.

I disegni seguenti, in successione, illustrano il metodo:



La correttezza geometrica di questa costruzione è evidente dal momento che, individuata la suddivisione in proporzione sulla base minore del trapezio, le altre parti del disegno sono ottenute mantenendo l'allineamento, cioè trasformando rette in rette. La consapevolezza piena di questa proprietà, all'apparenza ovvia, che punti allineati si proiettano in punti allineati e quindi debbono rimanere allineati nella rappresentazione sul piano del quadro, non era all'epoca così evidente.

*Docente di Matematica e Fisica, dal 2000 distaccata per motivi di ricerca scientifica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma Tor Vergata

Pubblicato il 26/1/2007

[Torna su](#)

[Torna all'indice](#)